Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 40

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

16 de septiembre de 2019

1. Diagonalización del Hamiltoniano de Klein-Gordon

Tenemos que calcular[1]

$$\int \frac{m^2}{2}\phi^2 \,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Para empezar vamos a calcular cuanto vale ϕ^2; sabiendo que

$$\phi = \int \left[a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^* e^{i(\omega_k t - kx)}\right] \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)(2\omega_k)} \tag{2}$$

Solo tenemos que multiplicar dos veces esta integral, por lo que nos queda:

$$\phi^2 = \int \left[a_k e^{-i(\omega_k t - kx)} + a_k^* e^{i(\omega_k t - kx)}\right]\left[a_q e^{-i(\omega_q t - qx)} + a_q^* e^{i(\omega_q t - qx)}\right] \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)(2\omega_k)}\frac{\mathrm{d}q}{(2\pi)(2\omega_q)} \tag{3}$$

Si multiplicamos los paréntesis tenemos:

$$a_k a_q e^{-i[(\omega_k+\omega_q)t-(k+q)x]} + a_k a_q^* e^{-i[(\omega_k-\omega_q)t-(k-q)x]} + a_k^* a_q e^{i[(\omega_k-\omega_q)t-(k-q)x]} + a_k^* a_q^* e^{i[(\omega_k+\omega_q)t-(k+q)x]} \tag{4}$$

Aprovechando ahora que la dependencia en x está solo en este término, podemos integrar con respecto de x. Usando la definición de $\delta(k)$

$$\int e^{ikx}\,\mathrm{d}x = \int e^{-ikx}\,\mathrm{d}x = 2\pi\delta(k) \tag{5}$$

$$(2\pi)\delta(k+q)\left[a_k a_q e^{-i(\omega_k+\omega_q)t} + a_k^* a_q^* e^{i(\omega_k+\omega_q)t}\right] + (2\pi)\delta(k-q)\left[a_k a_q^* e^{-i(\omega_k-\omega_q)t} + a_k^* a_q e^{i(\omega_k-\omega_q)t}\right] \tag{6}$$

Ahora podemos usar las deltas para integrar respecto de la variable q, pero esta vez, existe dependencia de la variable q fuera de los paréntesis que hemos estado considerando hasta ahora, por lo que debemos recuperar la expresión de ϕ^2 entera:

$$\int \phi^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \int \left(a_k a_k^* + a_k^* a_k + a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}\right)\frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^2 2(\omega_k)(2\omega_k)} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(a_k a_k^* + a_k^* a_k + a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}\right)\frac{\mathrm{d}k}{\pi\omega_k^2} \tag{8}$$

Finalmente recordemos que tenemos que multiplicar por $\frac{m^2}{2}$, así finalmente obtenemos

$$\int \frac{m^2}{2}\phi^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int m^2 \left(a_k a_k^* + a_k^* a_k + a_k a_{-k} e^{-2i\omega_k t} + a_k^* a_{-k}^* e^{2i\omega_k t}\right)\frac{\mathrm{d}k}{2\pi\omega_k^2} \tag{9}$$

Que es justo lo que nos pedía demostrar Javier.

[1] Tenemos que entender, durante todo el ejercicio, que las integrales son respecto a todo el espacio.